UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-3**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **11/03/2009**
DACIBAHCC

EXAMEN FINAL DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 110 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **CADA PREGUNTA VALE 5 PUNTOS**

Problema 1

Desarrolle una función que permita calcular la integral aproximada (Ia), la integral exacta (Ie) y el error correspondiente (error), de una función fun desde x0 hasta xf, considerando m intervalos mediante el método de Newton-Cotes cerrada de cuarto grado (n=4). Solo complete las líneas faltantes. Considere el parámetro fun como una cadena.

```
function [Ia, Ie, error] = integra(fun ,x0 ,xf ,m)
f=inline(fun);          %función f(x) a integrar
fi=inline(int(fun));    %función de la integral de f(x)

h= ______________________
Ia=0;

for   __________________________

 Ia=Ia+_________________________________________________________
end
Ie=____________________;Valor de la integral exacta
error=abs(Ie-Ia);
```

Solución

```
function [Ia,Ie,error]=integra(fun,x0,xf,n)
f=inline(fun);
fi=inline(int(fun));
h=(xf-x0)/n;
Ia=0;
for x=x0:h:xf-h
   Ia=Ia+h*(7*f(x)+32*f((4*x+h)/4)+12*f((2*x+h)/2)+ 32*f((4*x+3*h)/4)+7*f(x+h))/90;
end
Ie=fi(xf)-fi(x0);
error=abs(Ie-Ia);
```

Problema 2

Sea la función: $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

a) Obtener el spline natural para x=-2, -1, 0 y 1.
b) Verifique las condiciones que debe cumplir el spline.
c) Estime y’(-0.85) y el error cometido. Comente sus resultados.

Solución

Solución

a)

i	hi	x	F(x)	f[,]
0	1	-2	-1	1
1	1	-1	0	1
2	1	0	1	-1
		1	0	

En este caso:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} f[x_1x_2]-f[x_0x_1] \\ f[x_2x_3]-f[x_1x_2] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1-1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 0.80 \quad M_2 = -3.20 \quad M_0 = M_3 = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} x \in [-2, \quad -1] & 0.1333(x+2)^3 + 0(x+2)^2 + 0.8667(x+2) - 1 \\ x \in [-1, \quad 0] & -0.6667(x+1)^3 + 0.4(x+1)^2 + 1.2667(x+1) + 0 \\ x \in [0, \quad 1] & 0.5333(x-0)^3 - 1.6(x-0)^2 + 0.0667(x-0) + 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{lll} S_0(-2) = -1 & S_0(-1) = S_1(-1) & S_0''(-1) = S_1''(-1) \\ S_1(-1) = 0 & S_1(0) = S_2(0) & S_1''(0) = S_2''(0) \\ S_2(0) = 1 & S_0'(-1) = S_1'(-1) & S_0''(-2) = 0 \\ S_2(1) = 0 & S_1'(0) = S_2(0) & S_2''(1) = 0 \end{array}$$

c)

$$S_1(x) = -0.6667(x)^3 + 0.4(x+1)^2 + 1.2667(x+1) + 0$$

$$S_1'(-0.85) = 1.3417$$

$$-sen\left(\frac{\pi(-0.85)}{2}\right) = 1.5274$$

$$error = 0.1857$$

Para el calculo de la derivada el error es grande.

Problema 3

a) Determine x_1, x_2, c_1, c_2 para que la fórmula:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

de un resultado exacto siempre que f(x) sea un polinomio de grado 3 o menor.

b) Haciendo uso de la fórmula anterior aproxime: $\int_0^1 x^4 dx$

c) Estime el error y comente sus resultados.

Solución

a)

$$f(x) = a_0 + a_1 x \ + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x \ + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = a_0 \int_{-1}^{1} 1dx + a_1 \int_{-1}^{1} xdx + a_2 \int_{-1}^{1} x^2 dx + a_3 \int_{-1}^{1} x^3 dx$$

Entonces la formula produce resultados exactos cuando f(x)=1, x, x^2, x^3

$$c_1 * 1 + c_2 * 1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$c_1 * x_1 + c_2 * x_2 = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$

$$c_1 * x_1^2 + c_2 * x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 0$$

Resolviendo:

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = -x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b)

$$x = \frac{t+1}{2}$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(t+1)^2}{32} dt = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.1944$$

$$Ie = 0.2$$

$$Err = 0.0056$$

Problema 4

Una cierta masa "m" es lanzada verticalmente hacia arriba, teniendo en cuenta su peso y la fricción del viento proporcional a su velocidad, se deduce que obedece a la siguiente ecuación diferencial:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - mk \frac{dx}{dt}$$

Si m=5 kg, k=2, g=10 m/s^2, en el instante inicial x=0 m., y su velocidad es de v_0=5 m/seg.

a) Aproxime la ubicación de la masa al cabo de 0.5 segundos, considere $\Delta t = 0.1$ seg., usando el Método de Taylor de orden 2.

b) Determine el error porcentual y comente sus resultados, teniendo en cuenta que la solución exacta es:

$$x = \frac{1}{k^2} (g + k v_0)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t$$

c) A partir de lo obtenido en a) estime en que instante de tiempo se alcanzará la altura máxima.

Solución

a)

$$x'' = -10 - 2x'$$
$$x' = z$$
$$z' = -10 - 2z$$
$$x'' = z' = -10 - 2z$$
$$z'' = -2z' = 20 + 4z$$

Algoritmo de Taylor de orden 2:

$$t_{n+1} = t_n + h$$
$$x_{n+1} = x_n + hx'_n + \frac{h^2}{2}x''_n = x_n + hz_n + \frac{h^2}{2}(-10 - 2z_n)$$
$$z_{n+1} = z_n + hz'_n + \frac{h^2}{2}z''_n = z_n + h(-10 - 2z_n) + \frac{h^2}{2}(20 + 4z_n)$$

t	x	x'=z
0	0	5.0000
0.1000	0.4000	3.2000
0.2000	0.6380	1.7240
0.3000	0.7432	0.5137
0.4000	0.7394	-0.4788
0.5000	0.6463	-1.2926

b)

Valores exactos:

$$x = 5\left(1 - e^{-2t}\right) - 5t$$

t	x
0	0
0.1000	0.4063
0.2000	0.6484
0.3000	0.7559
0.4000	0.7534
0.5000	0.6606 (2.16%)

c)

t	**x**	**x'**
0.3000	0.7432	0.5137
0.4000	0.7394	-0.4788

Altura máxima cuando x'=0, interpolando linealmente: t=0.3518 seg.

Los profesores